Testen von Hypothesen

Markus Dangl

19. Mai 2011

Hier mal eine — viel zu auführliche — Beispielrechnung für das Testen von Hypothesen. Die Aufgabe habe ich von: `http://www.brinkmann-du.de/mathe/aufgabenportal/p9_stoch_ht_011/p9_stoch_ht_011.htm`.

Aufgabenstellung

Eine Fernsehserie hatte im letzten Jahr eine mittlere Einschaltquote von 10%. Das Management des Senders vermutet, dass die Beliebtheit der Serie im letzten Quartal des Vorjahres sogar etwas zugenommen hat. Weitere Serien sollen dazugekauft werden, wenn die Beliebtheit der Sendung tatsächlich zugenommen hat. Dazu sollen 200 Personen mittels einer Telefonaktion befragt werden. Man ist sich auch der Zufälligkeit von Stichprobenergebnissen bewusst und gibt sich mit einer Sicherheit von mindestens 95% des Befragungsergebnisses zufrieden. Bestimmen Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich, sowie den tatsächlichen Fehler 1. Art.

Erster Schritt: Nullhypothese

Zuerst einmal versuchen wir die Nullhypothese einfach als Satz aufzuschreiben. Die Nullhypothese sollte eigentlich immer der “Normalfall” sein, der “Fall in dem sich nichts ändert” oder die “Basis”. Da fürs Rechnen im Abi aber die Tabellen für Bernoulli benutzt werden, muss man auch eine bekannte Wahrscheinlichkeit p haben, sonst kommt man nicht weiter. Also kann ich auch einfach immer den Fall als Nullhypothese nehmen, von dem ich die Wahrscheinlichkeit kenne.

In dieser Aufgabe sind die möglichen Hypothesen: “Die Einschaltquote ist (immer noch) 10%” und “Die Einschaltquote ist gestiegen (größer 10%)”. Also bei der ersten Hypothese kenne ich $p = 10\%$, bei der zweiten weiß ich nicht genau, was p sein soll — nur “irgendwie größer als 10%”. Also bleibt mir eh nichts anderes, als den ersten Fall als Nullhypothese zu verwenden.

H_0 : Die Einschaltquote ist 10%.

Die andere Hypothese nennt man auch H_1 und oft schreibt man die nicht nochmal explizit hin, aber hier wäre sie:

H_1: Die Einschaltquote ist gestiegen, also größer als 10%.

Die Hypothese H_1 kann ich nicht wirklich testen, weil ich das genaue p dazu nicht kenne. Also machen wirs einfach so, dass wir H_1 annehmen, wenn wir glauben, dass H_0 *nicht gilt.*

Zweiter Schritt: Irrtum oder “Fehler 1. Art”

Der Fehler 1. Art ist immer der, dass H_0 wirklich gilt, ich aber fälscherlicherweise annehme dass H_0 *nicht gilt.* In unserem Beispiel heißt das:

Fehler 1. Art: Ich nehme fälschlicherweise an, dass die Einschaltquote gestiegen ist. (In Wirklichkeit ist sie aber nicht gestiegen, d.h. $p \leq 10\%$

Dritter Schritt: Der Test

Der Test der Hypothese ist immer irgendeine "Auswahl" aus einer sehr großen Menge. Wie z.B. 500 Schrauben aus allen die produziert werden, 100 Studenten aus allen die das Mensaessen "genießen" dürfen oder in unserem Beispiel 200 Leute aus allen die Fernsehen. Diese Auswahl hat immer Bernoulli–Verteilung, denn jeder von denen kann nur ja/nein sagen, und die Wahrscheinlichkeit ist für jeden gleich (z.B. die Wahrscheinlichkeit eine kaputte Schraube zu produzieren, mit dem Mensaessen unzufrieden zu sein oder in unserem Beispiel die Wahrscheinlichkeit die Fernsehserie anzusehen).

In der Aufgabe ist ja schon die Größe der Probe gegeben, d.h. das n für unsere Bernoulli-Verteilung ist bekannt. In unserem Beispiel sind das die 200 befragten Personen:

$n = 200$

Und das p nehmen wir einfach aus der Nullhypothese, denn was "besseres" haben wir nicht:

$p = 10\% = 0,1$

Das X im Test wären ja dann eigentlich die Anzahl der Leute, die bei der Umfrage sagen "Ich sehe die Fernsehserie an". Der eigentliche *Trick* beim Hypothesentest ist nun, dass wir eine Grenze k suchen: "Wie viele von den 200 Leuten müssen *ja* sagen, damit ich wirklich glaube, dass die Einschaltquote gestiegen ist?"

Man kann sich nun irgendein k willkürlich aussuchen — das wäre aber unklug, denn dann wissen wir nicht wie sicher wir bei unserem Test sind. Also lassen wir das k erstmal einfach als Variable stehen.

Muss ich nun $> k$ schreiben oder $< k$ oder $\geq k$ oder $\leq k$?

Dazu schauen wir uns nochmal ganz kurz den Fehler 1. Art an: Ich nehme an die Einschaltquote ist gestiegen. k ist die Anzahl der Leute, die bei der Umfrage sagen, dass sie die Fernsehserie anschauen. Also würde ich den Fehler 1. Art machen, wenn das Umfrageergebnis *zu viele* Zuschauer ergibt. Also:

$P(H_0, X \geq k)$ =Wahrscheinlichkeit für Fehler 1.Art. $=H_0$ gilt aber k oder mehr Leute in meiner Umfrage sagen *ja*.

Man schreibt eigentlich immer $\leq$ oder $\geq$, denn dann ist k genau die erste Zahl, ab der ich den Fehler mache.

Vierter Schritt: Signifikanzniveau und k bestimmen.

Im Moment haben wir also die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art formuliert: $P(H_0, X \geq k)$. Da wir wissen, dass die Umfrage Bernoulli-Verteilt ist, schreiben wir das am besten gleich so:

$B_p^n(X \geq k) = B_{0,1}^{200}(X \geq k)$ =Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art = Signifikanzniveau $= \alpha$ (Das Signifikanzniveau nennt man immer einfach α)

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

- In der Aufgabenstellung ist k gegeben und es wird das Signifikanzniveau gesucht (z.B.: Mit welcher Wahrscheinlichkeit kriegt Herr Blahblubb vom Chef eine auf den Sack, obwohl er doch die Schraubenproduktion verbessert hat — oder sowas).
- In der Aufgabenstellung ist das Signifikanzniveau gegeben und k wird gesucht. (z.B: Ab wievielen fehlerhaften Schrauben sollte der Chef Herrn Blahblubb rauswerfen, wenn er sich nur mit 5% irren will?)

Beide Fälle lassen sich mit unserer Formel beschreiben:

- Für ein gegebenes k berechne ich das Signifikanzniveau $\alpha = B_p^n(X \geq k)$
- Für ein gegebens Sig.–Niveau berechne ich k: $B_p^n(X \geq k) = \alpha$

In unserem Fall ist das Signifikanzniveau gegeben: "... mit einer Sicherheit von mindestens 95% ..." und damit $\alpha = 5\% = 0,05$, also suche ich nach k:

$B_{0,1}^{200}(X \geq k) < 0,05$ — hier habe ich auf einmal $< \alpha$ geschrieben da es ja heißt "mindestens 95%", also "höchstens 5% Fehler".

Jetzt muss ich also in den tollen Tabellen nachsehen, wie ich k wählen muss, damit da irgendwas kleiner $0,05$ rauskommt.

Aber... meine Tabellen geben nur $B(X \leq k)$ an!

Also wir möchten gerne was nachschauen, aber dass geht nur mit $B(X \leq k)$... d.h. wir müssen unsere Formel ein wenig umbauen. Zuerst versuchen wir, das Ungleichheitszeichen in die richtige Richtung zu bringen. Das geht einfach mit dem "Gegenereignis": Einfach "Eins minus" davorschreiben und dafür das Gegenteil vom Ungleichheitszeichen nehmen:

$B_{0,1}^{200}(X \geq k) < 0.05$

$\Leftrightarrow 1 - B_{0,1}^{200}(X < k) < 0.05$

Soweit, so gut, jetzt möchten wir aber irgendwas mit $\leq$ statt dem $<$, da in den Tabellen ja immer "bis einschließlich k" summiert wird. Dazu stellen wir uns schnell den Zahlenstrahl vor:

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ k-1,\ k,\ k+1,\ \cdots 198,\ 199,\ 200$

Also liegt das k irgendwo zwischen 0 und 200 auf dem Zahlenstrahl, links davon ist $k-1$, rechts davon $k+1$ usw.

Wenn wir jetzt eine Zahl suchen, die "kleiner als k" ist, können wir stattdessen den Bereich nehmen, der "kleiner gleich $k-1$" ist, denn das sind ja genau die gleichen Zahlen! Also schreiben wir jetzt:

$\Leftrightarrow 1 - B_{0,1}^{200}(X \leq k-1) < 0,05$

und stellen die Formel noch so um, dass das $B(...)$ allein auf einer Seite steht: Dazu nehmen wir das $B(...)$ einfach mit "+" auf die andere Seite:

$\Leftrightarrow 1 < 0,05 + B_{0,1}^{200}(X \leq k-1)$

und dann noch die 0.05 mit "-" auf die linke:

$\Leftrightarrow 1 - 0,05 < B_{0,1}^{200}(X \leq k-1)$

$\Leftrightarrow 0,95 < B_{0,1}^{200}(X \leq k-1)$

$\Leftrightarrow B_{0,1}^{200}(X \leq k-1) > 0,95$ (einfach umgedreht damit mans besser lesen kann)

Jetzt können wir in der Tabelle nachsehen, ab welcher Zahl ist der Wert größer als $0,95$? Ich nehme jetzt mal die Tabellen von `http://www.ina-de-brabandt.de/stochastik/download/binomialverteilung-tabellen-n200.pdf`) — ab 27 sind die Werte dort größer als $0,95$, nämlich $0,9566$.

Was wir gerade nachgeschaut haben ist aber $k-1$, also ist $k = 28$ ($k-1 = 27 \Leftrightarrow k = 27+1$).

Antwort

Was haben wir jetzt nochmal ausgerechnet? Siehe "Schritt vier": $B_{0,1}^{200}(X \geq k) < 0,05$ — "ab welchem k habe ich mehr als 95% Sicherheit?" — ab 28.

Also: Wenn in der Umfrage 0 bis 27 Leute zugeben, die Serie anzusehen, dann nehme ich H_0 an, d.h. ich glaube, dass die Einschaltquote nicht gestiegen ist. (Annahmebereich)

Wenn allerdings 28 oder mehr Leute die Serie gesehen haben, dann gilt H_0 nicht (Ablehnungsbereich) und daher "glaube" ich an H_1, also, dass die Einschaltquote gestiegen ist.

Der tatsächliche Fehler 1. Art ist $B_{0,1}^{200}(X \geq k) = 1 - B_{0,1}^{200}(X \leq k-1) = 1 - B_{0,1}^{200}(X \leq 27) = 1 - 0,9566 = 0,0434 = 4,3\%$. (Gut, denn wir wollten ja, dass er kleiner als 5% ist!).