Welche Lagen können zwei Geraden (im Raum) zueinander haben?

Vektorgeomtrie

Welche Lagen können zwei Ebenen (im Raum) zueinander haben?

Vektorgeomtrie

Welche Lagen kann eine Gerade bezüglich einer Ebene im Raum einnehmen?

Vektorgeomtrie

Wie heißt die Methode, die testet, ob zwei Vektoren "parallel" zueinander sind? Wie geht man dabei vor?

Vektorgeomtrie

Mit welcher Methode kann man testen, ob zwei Vektoren senkrecht auf einander stehen?

Vektorgeomtrie

Was ist der Schnitt zwischen Geraden g_1 und g_2 und wie berechnet man ihn?

Vektorgeomtrie

Welches Kriterium müssen 3 Punkte erfüllen, damit sie eindeutig eine Ebene festlegen?

Vektorgeomtrie

Wie erhalte ich aus zwei linear unabhängigen Vektoren einen dritten Vektor, so dass alle drei linear unabhängig sind?

Vektorgeomtrie

- Identisch
- Parallel
- Schnittgerade

- Identisch
- Parallel
- Schnittpunkt
- Windschief

Man testet die beiden Vektoren auf *lineare Abhängigkeit.*
Dazu setzt man die beiden Vektoren ins Verhältnis:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Ist dieses Gleichungssystem lösbar, so sind die Vektoren ein *vielfaches* voneinander, also linear abhängig, also "parallel".

- Gerade läuft *in* der Ebene
- Gerade läuft *parallel* zur Ebene
- Gerade *schneidet* die Ebene (es gibt einen Schnitt- oder Durchstoßpunkt)

Der Schnitt zweier Geraden ist (höchstens) ein *Punkt.*
Diesen erhält man durch Gleichsetzen von g_1 und g_2:

$$\vec{A_1} + \lambda\vec{u} = \vec{A_2} + \mu\vec{v}$$

Diese Gleichung kann man nach λ oder μ auflösen. (Gleichungssystem!)
Am Ende wird λ in g_1 (oder μ in g_2) eingesetzt, um die Koordinaten des Schnittpunktes zu erhalten.

Am einfachsten mit dem *Skalarprodukt.* Ist das Skalarprodukt 0, so sind die Vektoren senkrecht:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$$

Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$:

Mit dem *Vektorprodukt*: $\vec{u} \times \vec{v}$

Allgemein kann ich jeden Vektor "raten", der nicht in der von $\vec{u}, \vec{v}$ aufgespannten Ebene liegt — oder der eben nicht aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear kombiniert werden kann.

Sie dürfen *nicht auf einer Geraden* liegen.

Versuche mal, ein Mathebuch (Ebene) nur mit einem Stift (Gerade) zu halten!

Wie finde ich heraus, ob drei Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen?

VEKTORGEOMTRIE

Unter welcher Bedingung liegen zwei Punkte A und B im Raum auf einer Geraden?

VEKTORGEOMTRIE

Wie teste ich, ob drei Punkte A, B und C im Raum auf einer Ebene liegen?

VEKTORGEOMTRIE

Was ist ein ebenes Viereck? Wie teste ich, ob 4 Punkte A, B, C, D ein ebenes Viereck bilden?

VEKTORGEOMTRIE

Wie berechnet man die Länge eines Vektors? Rechne im Kopf: $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$

VEKTORGEOMTRIE

Erkläre die Schritte zur Umwandlung einer Ebene aus der Parameterform *in die* Hesse'sche Normalenform .

VEKTORGEOMTRIE

Wie berechne ich den Abstand eines Punktes P zur Ebene E?

VEKTORGEOMTRIE

Wie berechne ich den Abstand zweier Punkte A und B?

VEKTORGEOMTRIE

Keine Bedingung.
Zwei Punkte liegen immer auf einer Geraden.

Mehrere Möglichkeiten:

- Bilde die Geradengleichung
  $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB}$
  und teste, ob der Punkt C auf der Geraden liegt.
- Teste ob zwei Vektoren zwischen den Punkten (z.B.: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$) linear abhänging (= kollinear) sind.

Ein *ebenes Viereck* ist ein Viereck, das komplett in einer Ebene liegt.

- Stelle eine Ebenengleichung für 3 Punkte (A, B, C) auf, teste dann, ob D auch auf der Ebene liegt.
- Oder: Drei Vektoren zwischen den Punkten müssen komplanar (= linear abhängig) sein, teste also z.B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ auf lineare abh.

Garnicht.
Drei Punkte liegen immer auf einer Ebene.

Sei die Ebene gegeben durch: $E : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

- *Normalenvektor* rechnen: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
- *Vektorielle NF* zu *skalarer NF* durch ausmultiplizieren: $\vec{n} \circ \left[\vec{X} - \vec{A}\right]$
- Durch *Länge des Normalenvektors* teilen: $\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+d}{|\vec{n}|} = 0$
- *Auf negatives Vorzeichen bei d achten*:
  $d < 0$ - sonst einfach alle Vorzeichen umdrehen.

"Die Länge eines Vektors ist die Quadratwurzel aus der Summe seiner quadrierten Koordinaten."
(oder so ähnlich)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Man berechnet die *Länge des Vektors* zwischen A und B, also:

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Hesse'sche Normalenform: Bringe E in HNF. Setze P in die HNF ein.

Falls vorher schon das *Lot* des Punktes P auf E berechnet wurde, kann man auch einfach die Länge des Lotes nehmen.

Wie berechne ich den Vektor zwischen zwei Punkten A und B?

VEKTORGEOMTRIE

Welche Bedeutung haben die beiden Vektoren in folgender Gleichung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

VEKTORGEOMTRIE

Welchen Abstand hat diese Ebene vom Ursprung?
$4x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 12 = 0$

VEKTORGEOMTRIE

Welchen Richtungsvektor hat die Gerade durch die Punkte:
$A\,(3|5|2)$ *und* $B\,(4|5|4)$ *?*

VEKTORGEOMTRIE

Welche (skalare) Formel stellt am einfachsten die x_1x_3*-Ebene dar?*

VEKTORGEOMTRIE

Welche Schritte benötigt man um den Fußpunkt F *des Punktes* P *auf der Geraden* $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ *zu ermitteln?*

VEKTORGEOMTRIE

Wie berechne ich den (spitzen) Schnittwinkel einer Ebene
$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0$
und einer Geraden
$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$*?*

VEKTORGEOMTRIE

Wer ist der beste Mathe-Nachhilfelehrer auf der Welt?

VEKTORGEOMTRIE

Diese Gleichung stellt eine Gerade in *Paramterform* dar.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist der Aufpunkt.

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor.

Spitze minus Fuß!

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor rechnet sich einfach Spitze minus Fuß:

$$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors: $\sqrt{16+4+16} = 6$

Der Abstand von $\vec{O}$ entspricht der Konstante am Ende der Gleichung, also:

$d(E,O) = \left|\frac{-12}{6}\right| = 2$

- F liegt auf g, also gilt: $\vec{F} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ (I)
- $\overrightarrow{PF} \perp g$ also $\overrightarrow{PF} \circ \vec{u} = 0$ (II)
- Ermittle λ durch lösen des Gleichungssystems. z.B.: (I) in (II)
- Ermittle F durch einsetzen von λ in (I)

Die x_1x_3-Ebene hat die x_2-Achse als "Normale", also:

$x_2 = 0$

...

Um den Schnittwinkel zu berechnen, verwendet man den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene (ablesen) und den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Gerade.

Da hier "verschiedene" Vektoren verglichen werden, verwenden wir $\sin\phi$ statt $\cos\phi$.

$\sin\phi = \left|\frac{\vec{n}\circ\vec{u}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}\right|$