# Markus' Notizen für die Analysis

Markus Dangl

1.4.2011

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Funktionen

Funktionen sind, einfach gesagt, Formeln, in die man einen Wert (meistens $x$) einsetzen kann um einen Ergebniswert (meistens $y$) zu berechnen. Meistens gibt man den Funktionen einen Namen (hier z.B. $f$) und schreibt sie dann so: $f(x) = ...$ , wobei der Funktionsterm (der mit ... bezeichnete Teil) die Variablen $x$ enthält. Man sagt auch die Funktion $f$ bildet die $x$ auf einen Wert $y$ ab. Für jeden Wert $x$ den ich also in die Funktion "hineinschmeiße" bekomme ich (höchstens) einen $y$-Wert. (Manchmal auch keinen, wenn die Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist.)

Wenn die Funktion noch weitere Variablen enthält (z.B.: $f(x) = ax + b$), dann nennt man diese "Parameter". Eigentlich sind diese Parameter ganz normale Variablen, aber sie sind eben *fest*, d.h. ihr Wert hängt nicht davon ab, was ich für $x$ wähle. Je nachdem, welche Werte ich für die Parameter $a$, $b$ einsetze erhalte ich eine andere Funktion. Deswegen nennt man eine Funktion mit Parametern auch oft eine Funktionsschaar.

Man kann für die Funktion auch einen Graphen zeichnen, der das ganze etwas anschaulicher machen soll. Fürs Rechnen hat der Graph meist keine große Bedeutung — zwar kann man auch am Graphen die Funktionswerte (z.B. via Lineal) ablesen — aber das ist relativ ungenau. Berechnen kann man ja schließlich den exakten Wert. Es gibt Taschenrechner und Computerprogramme, die einem das Zeichnen abnehmen — damit kann man dann sehr schön sehen, was passiert wenn ich meine Funktion irgendwie verändere. Sowas gibts auch Online — einfach nach "Function plotter" googlen oder z.B. hier: `http://fooplot.com/`

## 1.1 Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion einer Funktion $f$ bezeichnet man mit $f^{-1}$ — das $-1$ ist dabei kein Exponent. (Ich erinnere hier auch nochmal an $\sin^{-1}$ u.ä. auf dem Taschenrechner.)

Wenn die Funktion $f$ aus einem Wert $x$ einen Wert $y$ berechnet, dann würde die Umkehrfunktion aus $y$ wieder $x$ machen — sie kehrt also genau den Vorgang der Funktion $f$ um.

Nicht alle Funktionen haben eine Umkehrfunktion: $f$ kann für zwei verschiedene Eingaben $x$ zweimal die gleiche Ausgabe $y$ berechnen - dann müsste $f^{-1}$ ja für dieses $y$ zwei verschiedene $x$ berechnen — das geht aber nicht, denn eine Funktion darf ja für jeden Eingabe-Wert nur einen Ausgabe-Wert liefern.

Oft lässt sich die Umkehrfunktion einfach durch Umformen ausrechnen. Habe ich z.B.:
$f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ dann kann ich sie erstmal mit y und x schreiben und nach x auflösen:
$y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \Leftrightarrow \frac{y-b}{a} = x$ — also: $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.

Wie die Variable der Funktion heißt ist ja völlig Wurst, also nennen wir sie um, damit sie wieder schön $x$ heißt: $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

## 1.2 Definitions- und Wertemenge

Zu einer Funktion $f$ gibt man häufig auch noch eine Definitions- und eine Wertemenge an. Die Definitionsmenge gibt alle Werte an, die man für $x$ einsetzen darf — also alle Werte auf denen $f$ *definiert* ist. Die Wertemenge gibt alle Werte an die als Ergebnis der Funktion "herauskommen können", also alle möglichen Werte für y. Soll man die Definitionsmenge bestimmen, so "durchsucht" man den Term von $f$ nach "Dingen die man nicht machen darf". Dazu gehören insbesondere:

- Brüche $\frac{a}{b}$, dort muss $b \neq 0$ sein.
- Wurzeln $\sqrt{a}$, denn hier muss $a \geq 0$ sein.
- Logarithmus $\log a$ oder $\ln a$, hier muss $a > 0$ sein.
- Sehr selten auc Potenzen $a^b$, hier dürfen nicht $a$ und $b$ gleichzeitig Null sein, also $a \neq 0 \vee b \neq 0$

*Beispiel:* Nehmen wir die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2+\ln(x-1)} - x^x$.

Was darf alles *nicht* passieren?

1. Unterm Bruch keine Null $\Rightarrow 2 + \ln(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) \neq -2 \Leftrightarrow x - 1 \neq e^{-2} \Leftrightarrow x \neq e^{-2} + 1$

2. Unter der Wurzel nix Negatives $\Rightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

3. Im Logarithmus nur Positives $\Rightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

4. Hier sogar der Sonderfall mit der Potenz: Bei $x^x$ darf man nicht 0 einsetzen, denn was soll $0^0$ sein? $\Rightarrow x \neq 0$

Die Beschränkung aus 3. "überdeckt" jetzt natürlich Nr. 2 und Nr. 4, denn wenn $x$ schon größer als 1 sein muss ist es automatisch größer gleich -1 und auch nicht 0.

Also geben wir eine Menge an, die alle Zahlen enthält die größer als 1 sind, aber auch nicht den speziellen Wert $e^{-2}+1$ enthält:

$\mathbb{D}_f = ]-1;\infty[ \setminus e^{-2}+1$

**Wertemenge**

Die Wertemenge ist übrigens die Definitionsmenge der Umkehrfunktion. Falls ihr also die Wertemenge bestimmen sollt und bereits die Umkehrfunktion habt — oder diese sich schnell ausrechnen lässt, was meistens der Fall ist — dann könnt ihr einfach deren Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f^{-1}}$ bestimmen, denn $\mathbb{W}_f = \mathbb{D}_{f^{-1}}$.

## 1.3 Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f$ bezeichnet man mit $f'$, deren Ableitung dann mit $f''$ usw. — man nennt dies dann auch erste Ableitung, zweite Ableitung usw.

Die Ursprungsfunktion berechnet zu jedem Wert $x$ einen Wert $y$, also die "Höhe" des Punktes im Funktionsgraphen an der Stelle $x$. Die erste Ableitung bestimmt an der gleichen Stelle nicht die "Höhe", sondern die Steigung der Funktion $f$, die diese an genau der Stelle $x$ hat. Man kann das auch so interpretieren: Die Ableitung bestimmt immer, wie "schnell" sich der $y$-Wert ihrer Ursprungsfunktion an der Stelle $x$ gerade ändert — also:

- Die Berechnung (durch einsetzen von $x$) der ursprünglichen Funktion $f$ ergibt immer die Höhe der Kurve. Positive Werte bedeuten, dass der Punkt über der x-Achse liegt, Negative liegen unter der x-Achse.

- Die erste Ableitung bestimmt die "Änderung der Höhe", also die Steigung. Positive Werte bedeuten, dass die Funktion an der Stelle steigt, Negative, dass sie fällt. 0 bedeutet also weder fallend noch steigend, also an dieser Stelle "flach" — das ist dann oft ein Extremwert.

- Die zweite Ableitung bestimmt die "Änderung der Steigung", also die "Krümmung". Positive Werte bedeuten, dass die Steigung größer wird, also die Funktion nach oben gekrümmt ist — umgekehrt lässt eine negative zweite Ableitung auf eine Krümmung nach unten schließen. Ergibt die zweite Ableitung den Wert 0, so ist die Funktion an der Stelle nicht gekrümmt, läuft also "gerade". Das ist dann oft ein Wendepunkt.

- Ab der dritten Ableitung wirds schwer vorstellbar, man kann höchstens an eine "Änderung der Krümmung" usw. denken — eine geometrische Interpretation dieser Werte braucht man jedoch oft nicht mehr.

Es gibt ein paar spezielle Regeln zum Ableiten, die man grundsätzlich beherrschen sollte:

- Die Kettenregel (oder "Nachdifferenzieren"). Dies ist die wichtigste Regel, da man mit ihr sehr viele Sachen ableiten kann.

- Ableitungen von Konstanten, Plus-Minus-Termen - sind relativ inuitiv, die übt man ja sowieso ständig.

- Ableitung der Multiplikation $(a \cdot b)' = (a' \cdot b) + (b' \cdot a)$ und bei Brüchen $\left(\frac{N}{Z}\right)' = \frac{N \cdot Z' - Z \cdot N'}{N^2}$ a.k.a. die "NAZ minus ZAN – Regel".

- Ableitung von Potenzen: $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$ — das geht auch für $n<0$ und allgemein für $n \in \mathbb{R} \setminus 0$ (lies: Brüche und reelle Zahlen — also alles — außer Null!).

- Ableitung der Exponentialfunktion: $\left(e^x\right)' = e^x$

- Ableitung des Logarithmus: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

So ziemlich alles andere kann man aus diesen “Grundregeln” herleiten. Diese Regeln — und vermutlich noch einige mehr — solltet ihr in eurer Formelsammlung finden.

### 1.4 Stammfunktion

Die Stammfunktion $F$ zu $f$ kann man als den Flächeninhalt unter dem Graphen verstehen. Wenn man die Stammfunktion wieder ableitet, erhält man wieder die Ursprungsfunktion $f$. Um einen konkreten Flächeninhalt zu berechnen, benötigt man das bestimmte Integral $\int_a^b f\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Da übrigens jede Funktion, deren Ableitung $f$ ergibt eine Stammfunktion von $f$ ist, gibt es mehrere solche Funktionen. Aus dem letzten Abschnitt über Ableitungen wissen wir ja, dass die Ableitung einer Funktion ihrer Steigung beschreibt, d.h. in diesem Fall beschreibt $f$ die Steigung von $F$ — also ist jede Funktion die an der gleichen Stelle $x$ die gleiche Steigung wie $F$ hat ebenso eine Stammfunktion von $f$. Praktischerweise sind diese Stammfunktionen aber alle von der Form $F_c(x) = F(x) + c$ — also einfach um einen konstanten Wert nach oben/unten verschoben, denn nur so haben sie auch an jeder Stelle die gleiche Steigung.

Die Stammfunktionen bestimmt man ähnlich wie bei der Ableitung mit ein paar Regeln, hier verweise ich erstmal noch auf die Formelsammlung (*TODO)*.

## 2 Spezielle Funktionen

Es gibt einige spezielle Funktionen die man kennen und beim Namen nennen können sollte:

### 2.1 Polynomfunktionen

$f(x) = ax^4 + bx^3 + ... + e$ (beliebig lang). Die höchste Potenz von x bezeichnet den *Grad* des Polynoms.

Spezialfälle sind:

- *Konstante Funktion:* Grad 0 $f(x) = a$ (Graph: waagrechte Gerade auf Höhe $a$)
- *Lineare Funktion:* Grad 1 $f(x) = mx + t$ (Graph: Gerade mit Steigung $m$ und y-Achenabschnitt $t$)
- *Quadratische Funktion:* Grad 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Graph: Parabel...)

Polynome kann man faktorisieren. Dazu benötigt man die Nullstellen des Polynoms $x_1, x_2, x_3 \ldots$ und schreibt dann:

$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots$

Die Nullstellen dazu lassen sich nur für Polynome von Grad 2 oder niedriger berechnen (Für Grad 2 mit der Mondscheinformel). Polynome höheren Grades faktorisiert man, indem man eine Nullstelle “rät” und dann das Polynom durch den Term $x - x_1$ teilt (via Polynomdivision). Dann erhält man ein Polynom das vom Grad her eins kleiner ist mit dem man dann wieder weitermacht, bis man Grad 2 oder kleiner hat und schließlich einfach Mondscheinformel rechnen darf.

### 2.2 Gebrochen–rationale Funktionen

$f(x) = \frac{ax^3+bx^2+...}{cx^2+dx+...}$ hat einen Zähler- und einen Nennergrad.

Oben und unten sind ganz “normale” Polynome. D.h. auch diese Polynome kann man faktorisieren wie oben. Manchmal kann man sogar eine Nullstelle oben und unten “kürzen” — dann erhält man einen Funktionsterm der sich sogar von der Definitionsmenge her erweitern lässt, denn jetzt gibt es eine Möglichkeit weniger, unter dem Bruch eine Null zu bekommen.

Die Definitionsmenge einer gebrochen–rationalen Funktion ist immer ganz $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nennerpolynoms (klar — unterm Bruch darf keine Null rauskommen!).

## 2.3 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind alle Funktionen, die eine Konstante als Basis haben und bei denen das $x$ nur im Exponenten vorkommt.

z.B.: $f(x) = e^{ax+b}$

## 2.4 Trigonometrische Funktionen

Werden seltener auch goniometrische Funktionen genannt. Das sind sin, cos, tan, ihrer Inversen (z.B.:$\sin^{-1}$) und ein paar andere die man im Abi nicht braucht. Beispielsweise:

$f(x) = \sin(x)$

## 2.5 Sonstige Transzendente Funktionen

Transzendente Funktionen nennt man eigentlich alle Funktionen, die nicht algebraisch sind — also keine Polynome oder gebrochen–rationale Funktionen. D.h. auch Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen sind transzendent. Im allgemeinen sind aber transzendente Funktionen sehr schwer zu behandeln, da man oft nicht ihre *Umkehrfunktion* berechnen kann, und auch Ableitung und Integral sind nicht so leicht zu berechnen. Denkt euch unter dieser Kategorie einfach alle Funktionen die verdammt kompliziert sind, z.B. bei denen das $x$ gleichzeitig in Basis und Exponent vorkommt, oder bei denen teils trigonometrische und teils Polynomterme vorkommen. Ein paar Beispiele wären:

- $f(x) = (x+1) \cdot \sin(x-1) + \frac{1}{4}$
- $f(x) = (2x+3)^{x+0,5}$
- $f(x) = \frac{1}{\tan x} - x^2$

... und ähnlicher Käse. Das heißt noch nicht, dass man damit "garnichts" machen kann — aber man kann meist nicht aus einem gegebenen $y$-Wert den dazugehörigen $x$-Wert bestimmen:

$(x+1) \cdot \sin(x-1) + \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1) \cdot \sin(x-1) = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$??? nicht weiter auflösbar!

Also ist es hier schwer, die Nullstellen zu bestimmen (man könnte noch raten...). Manchmal gibts Sonderfälle, zum Beispiel:

$(2x+3)^{x+0.5} = 0$

Ich prüfe $(2x+3) = 0$ — weil eine Potenz nur dann Null werden kann, wenn die Basis Null ist

$\Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -1,5$ — jetzt muss ich am Schluss immer nochmal sicherheitshalber einsetzen um zu prüfen obs auch wirklich eine "brave" Nullstelle ist:

$(2(-1,5)+3)^{(-1,5)+0.5} = (-3+3)^{-1} = 0^{-1} = \frac{1}{0}$ — ohje, geteilt durch Null, das ist wohl eine Definitionslücke, d.h. ich habe keine Nullstellen!

Wie man also sieht kann das ganze hier beliebig kompliziert werden, denn transzendente Funktionen/Gleichungen sind "alle, die nicht einfach sind". Transzendente Funktionen werden eher selten verwendet, und wenn, dann nur in besonderen Formen mit denen sich auch wirklich was machen lässt — denn schließlich umschließen diese Funktionen so ziemlich alles an komplizierter Mathematik was man überhaupt erfinden kann und sowas ist dann eher ein Fall für Mathematik-Profs.

# 3 Kurvendiskussion

## 3.1 Bestimmung der Definitionsmenge

Siehe Abschnitt 1.2 auf Seite 2.

## 3.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (Nullstellen)

**Schnittpunkt mit der y-Achse**

Das einfache zuerst: Wenn ich den Schnittpunkt mit der y-Achse haben möchte, so ist natürlich $x = 0$. D.h. ich muss einfach $f(0)$ berechnen, dann bekomme ich den entsprechenden $y$-Wert und kann den Schnittpunkt $S_y(\,0\,|\,f(0)\,)$ angeben!

**Schnittpunkte mit der x-Achse**

Für alle Punkte auf der x-Achse muss $y = 0$ sein. Also heißt das $f(x) = 0$ — also suche ich die Nullstellen der Funktion $f$. Wie man die Nullstellen nun genau berechnet hängt vom Funktionsterm ab — meist sind das Polynome (deren Nullstellen man mit Polynomdivision und Mondscheinformel berechnet) oder gebrochen–rationale Funktionen (dito, aber nur für das Zählerpolynom). Hier ist es immer wichtig zu denken: "Wann wird der Term wirklich Null?".

**Beispiel** $\frac{x^2-2}{x} = 0$

Wann wird ein Bruch Null? — Nur wenn der Zähler Null wird, also können wir ausschließlich den betrachten:

$x^2-2 = 0$ ... das ist eine quadratische Gleichung. Wenn einem dazu nix einfällt klappt immer die Monscheinformel — aber in dem Fall wäre das ein wenig übertrieben:

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

**Ein komplizierteres Beispiel** $(x + 1) \cdot \sin x = 0$

Wann kann das Null werden? — Bei einem Produkt: Wenn einer der beiden Faktoren gleich Null wird! Also bekommen wir:

$\Leftrightarrow (x + 1) = 0 \vee \sin x = 0$ — Der erste Teil ist einfach. Wann aber wird $\sin x = 0$? Denkt einfach an die Sinuskurve, wo sind dort die Nullstellen? Bei $0, \pi, 2\pi, \ldots$ also bei $n\pi$ für ganze $n$ (also wenn $n \in \mathbb{Z}$). Wie schreibe ich sowas dann hin?

- Für die eine Nullstelle aus $x + 1 = 0$ schreiben wir $x_0 = -1$
- Von denen beim Sinus gibt es unendlich viele, daher schreibt man entweder einfach "$x = \ldots, -2\pi, \pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$"
- Oder man gibt eine Menge an: $x \in \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1\}$ — lies: Nullstellen sind aus der Menge aller Zahlen die sich mit $n\pi$ für $n$ als ganze Zahlen beschreiben lassen, oder halt $-1$.

## 3.3 Symmetrieeigenschaften

Es gibt zwei Arten von Symmetrie: Achsensymmetrie und Punktsymmetrie. Achsensymmetrisch sind alle Formen, durch die ich eine Linie so ziehen kann, dass diese wie ein "Spiegel" funktioniert — das ist meist recht intuitiv: z.B. Gesichter sind relativ symmetrisch, die meisten Fahrzeuge (zumindest von außen), usw denn Symmetrie ist für Menschen "ästhetisch".

Die Punktsymmetrie ist ein bisschen weniger intuitiv. Ein Beispiel für Punktsymmetrie ist der Buchstabe Z: Wenn ich in die Mitte einen *Punkt* mache, so läuft sieht der "obere Teile" des Z genau *umgekehrt* aus wie der "untere Teil".

Es gibt auch ein paar Formen, auf die *beides gleichzeitig* zutrifft. Ein Kreis ist z.B. zu seinem Mittelpunkt *punktsymmetrisch* und zu jedem beliebigen Durchmesser *achsensymmetrisch*. Auch für den Buchstaben X gilt beides.

Nun zu Symmetrie bei Funktionen: Man betrachtet dort meist die Symmetrie zur y-Achse oder die Punktsymmetrie zum Ursprung. (Frage: warum macht Symmetrie zur x-Achse keinen Sinn bei Funktionen?) Ist eine Funktion zur y-Achse symmetrisch, so muss sie nach "links" genauso verlaufen wie nach "rechts" — als würde man einen Spiegel aufs Papier auf die y-Achse stellen. D.h.: Die "Höhe" der Punkte im Funktionsgraphen ist gleich, egal ob ich "nach links" (ins Negative) oder "nach rechts" (ins Positive) gehe:

$f(-x) = f(+x)$ ist die Formel für *Achsensymmetrie zur y-Achse*

Für die Punksymmetrie ist das ähnlich, aber hier muss die "Höhe" der Punkte im Graphen genau umgekehrt sein. Also:

$f(-x) = -f(+x)$ ist die Formel für *Punktsymmetrie zum Ursprung*

Um nun eine Symmetrie nachzuweisen, muss man nur zeigen, dass die entsprechende Gleichung gilt. Einfaches Beispiel:

$f(x) = x^4$ ist symmetrisch zur y-Achse, weil:

$f(-x) = f(+x) \Leftrightarrow (-x)^4 = (+x)^4 \Leftrightarrow x^4 = x^4$ — denn wenn man einen geradzahligen Exponenten hat fliegt das Vorzeichen raus!

### 3.4 Extrema

Extrema (Plural von Extremum — Latein halt...) sind lokale Maxima und Minima einer Funktion $f$. "Lokal" heißt im Gegensatz zu "Global", dass das Minimum (Maximum) nicht der tiefste (höchste) Punkt der ganzen Funktion sein muss, sondern nur der tiefste (höchste) Punkt in einem Abschnitt der Funktion. Stellt euch einfach eine Funktion vor, die wie das Symbol "~" verläuft: Sie hat ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, auch wenn sie an den Enden bis ins unendliche nach oben/unten verläuft.

Extrema berechnet man am einfachsten mit der ersten Ableitung: An einem Extremum muss die erste Ableitung immer Null sein:

$f^{'}(x) = 0$ — aber das reicht noch nicht ganz, außerdem wissen wir noch nicht, ob es ein Maximum oder Minimum ist. Da brauchen wir noch was, und zwar gibt es zwei Möglichkeiten:

- Ich kann mir den Funktionsgraphen anschauen und zwei Punkte direkt neben dem Extremum nehmen. Liegen beide Punkte unter dem Extrempunkt, so haben wir ein Maximum, liegen beide darüber, so haben wir ein Minimum. (Zeichnet euch das mal auf...) Falls aber die beiden Punkte unterschiedlich liegen, also einer unterhalb, einer überhalb der Stelle wo $f^{'}(x) = 0$ ist, so haben wir *kein* Extremum — sowas nennt man dann eine Flachstelle, Flachpunkt oder Terassenpunkt. (Am besten auch gleich mal aufzeichnen!)

- Noch besser und genauer ist es, sich einfach die zweite Ableitung $f^{''}(x)$ anzusehen: Nennen wir das $x$ an dem wir $f^{'}(x) = 0$ haben einfach mal $x_E$, so haben wir drei Möglichkeiten was für $f^{''}(x_E)$ rauskommen kann:

| $f^{''}(x_E)$ ist | d.h. Krümmung ist... | und das heißt... |
|---|---|---|
| $< 0$ | nach unten | Wir haben ein Maximum! |
| $= 0$ | gerade | Wir haben einen Terassenpunkt |
| $> 0$ | nach oben | Wir haben ein Minimum! |

Also: Berechnet am besten die erste und zweite Ableitung. Setzt $f^{'}(x) = 0$ und berechnet (alle) $x$ dafür. Testet dann mit der zweiten Ableitung für jedes dieser $x$, ob ihr ein Maximum/Terassenpunkt/Minimum habt. Die $y$-Koordinate der Punkte kriegt ihr — natürlich — einfach, in dem ihr die $x$ in die ursprüngliche Funktion $f$ einsetzt — also $f(x)$ berechnet.

### 3.5 Wendepunkte

### 3.6 Polstellen