# Abiturtrainer 2011 Seite 160

Markus Dangl

May 19, 2011

## Abitur Mathematik (Bayern G8): Übungsaufgabe 3 Stochastik

Ebbe in der Abi-Kasse!

Um das zu ändern, wollen die Abiturienten des Pythagoras-Gymnasiums eine Lotterie veranstalten. Drei Modelle stehen zur Wahl:

- Modell 1: 500 Lose

| Anzahl Lose | Gewinn |
|---|---|
| 1 | 50 € |
| 2 | 20 € |
| 3 | 10 € |
| 4 | 5 € |

- Modell 2: 1000 Lose

| Anzahl Lose | Gewinn |
|---|---|
| 1 | 100 € |
| 2 | 40 € |
| 3 | 20 € |
| 4 | 10 € |

- Modell 3: 1000 Lose

| Anzahl Lose | Gewinn |
|---|---|
| 1 | 50 € |
| 3 | 20 € |
| 10 | 10 € |
| 14 | 5 € |

Bei allen Aufgaben ist der Verkauf aller Lose vorausgesetzt.

## 1 Aufgabe

a) Vergleichen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße "Reingewinn für den Käufer eines Loses" bei den drei Modellen.

Formel für den Erwartungswert ist immer: "Wahrscheinlichkeit mal Ergebnis". Wenns unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten und Ergebnisse gibt, werden einfach alle aufsummiert.

- Modell 1:
  1 von 500 Losen mit 50 €: $\frac{1}{500} \cdot 50€$
  2 von 500 Losen mit 20 €: $\frac{2}{500} \cdot 20€$
  3 von 500 Losen mit 10 €: $\frac{3}{500} \cdot 10€$
  4 von 500 Losen mit 5 €: $\frac{4}{500} \cdot 5€$
  Rest Nieten mit 0 €: $500 - 4 - 3 - 2 - 1 = 490$ Nieten: $\frac{490}{500} \cdot 0€$

In jedem Fall kostet ein Los 1 €
Also: $\mu = \frac{1}{500} \cdot 50€ + \frac{2}{500} \cdot 20€ + \frac{3}{500} \cdot 10€ + \frac{4}{500} \cdot 5€ + \frac{490}{500} \cdot 0€ - 1€ = -0,72€$

- Die anderen gehen analog, das dürft ihr jetzt selbst rechnen... ;)

b) Wie hoch ist bei den drei Modellen jeweils die Wahrscheinlichkeit, beim Kauf von 10 Losen mindestens einen Gewinn zu ziehen?

Weil nun wurst ist, *wieviel* man Gewinnt, sonder nur zählt *ob* ich gewinne müssen wir nur noch über die Wahrscheinlichkeit nachdenken. Ändert sich die Wahrhscheinlichkeit beim ziehen eines Loses? Ja, denn das Los wird ja danach nicht wieder zurückgelegt. Also verwenden wir die Formel für Ziehen ohne zurücklegen.

*Rechnung kommt noch wenn ich nachher noch Zeit habe.*

## 2 Aufgabe

Die Abiturienten entscheiden sich zunächst für eine Durchführung der Lotterie nach dem Modell 3.

a) Wie groß ist beim Modell 3 die Wahrscheinlichkeit, beim Kauf von 10 Losen weder Gewinn noch Verlust zu machen?

Wenn man das ganz allgemein angehen würde, müsste man nun bestimmen, welchen Erwartungswert wir beim "Ziehen mit zurücklegen" haben, aber mit ungleichen Loswerten. *Das geht so nicht, denn das ist keine Kette mehr (Das Urnenmodell kennt keine unterschiedlichen "Preise"!)*

Also müssen wir einfach Fallunterscheidung machen: Welche Möglichkeiten gibt es, 10 Lose so zu ziehen, dass ich einen Reingewinn von 0€ habe? Also muss ich *exakt* 10€ gewinnen — denn das waren ja die Ausgaben für die Lose! Welche "Kombinationen von Gewinnen" gibt es, so dass insgesamt 10€ rauskommen?

- Einmal 10€, neun mal Niete
- Zweimal 5€, acht mal Niete

Um nun die Wahrscheinlichkeit auszurechnen teilen wir die Anzahl der "gewollten Fälle" durch die Anzahl der "Fälle insgesamt". Was sind denn überhaupt unsere "gesamten" und "gewollten" Fälle?

Wieviele Möglichkeiten gibt es, 10 aus 1000 Losen zu ziehen? $\binom{1000}{10}$

Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein 10€ Los zu ziehen? (Eins aus 10 Losen) $\binom{10}{1}$ — und die 9 Nieten? (Es gibt $1000 - 28 = 972$ Nieten): $\binom{972}{9}$

Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei 5€ Lose zu ziehen? (Zwei aus 14) $\binom{14}{2}$ — und dazu 8 Nieten? $\binom{972}{8}$

### Verknüpfung der Möglichkeiten:

Wenn ich zwei "Möglichkeiten" habe, die *gleichzeitig* eintreten müssen, dann verknüpfe ich diese mit "mal". Wenn *entweder* die eine *oder* die andere eintritt, dann schreibe ich "plus".

Also formulieren wir das ganze so:
Ich ziehe:

- Ein 10€ Los und *gleichzeitig* 9 Nieten

*oder*

- Zwei 5€ Lose und *gleichzeitig* 8 Nieten

Das heißt:

$$\frac{A_{\text{gewollt}}}{A_{gesamt}} = \frac{A_{\text{einmal 10€}} \cdot A_{\text{9 Nieten}} + A_{\text{zweimal 10€}} \cdot A_{\text{8 Nieten}}}{A_{\text{10 Lose aus 1000}}}$$

Und das rechnen wir jetzt einfach aus:

$$= \frac{\left(\begin{array}{c}10\\1\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}972\\9\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}14\\2\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}972\\8\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}1000\\10\end{array}\right)}$$

und ich hoffe euer Taschenrechner packt das... :)

Und wenn mir jemand sagen kann warum das Euro-Symbol in LaTeX so verdammt *hässlich* ist und wie ich es schön kriege wäre ich dafür sehr dankbar.